Implementation of the model of three-index transportation problem in the software environment MathCad
Kostenko D.
Реализация модели трехиндексной транспортной задачи в программной среде MathCad
Костенко Д. А.

Костенко Дмитрий Александрович / Kostenko Dmitrii Aleksandrovich - студент,
магистерская программа «Стратегическое управление логистикой»,
факультет экономики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Санкт-Петербург

Аннотация: *задача данного исследования состояла в изучении теоретических основ трехиндексной транспортной задачи, возможностей ее применения в планировании цепи поставок крупных торговых организаций, а также в написании реализации алгоритма решения данного типа задачи. Для реализации задачи были использованы следующие методы: изучение литературы по выбранной тематике; анализ алгоритмов решения трехиндексной транспортной задачи; моделирование реализации данных алгоритмов решения в программной среде MathCad. Проделанная работа предлагает алгоритм реализации трехиндексной транспортной задачи, который может применяться на практике крупными торговыми предприятиями.*

Abstract: *the objective of the current study was to study the theoretical foundations of three-index transportation problem, possibilities of its application to the planning of the supply chain of major trade organizations, as well as writing of an algorithm for solving this type of problem. To implement the objectives following methods were used: the study of the literature on selected topics; analysis of algorithms for solving the three-index transportation problem; modeling algorithms of these solutions in a software environment - MathCad. The given study proposes the implementation of the algorithm of transportation problem solution, which can be practiced by large commercial enterprises.*

Ключевые слова: *транспортная задача, трехиндексная транспортная задача, планирование цепей поставок, линейное программирование, метод потенциалов.*

Keywords: *transportation problem, three-index transportation problem, supply chain management, linear programming, method of potentials.*

На практике часто возникает задача составления такого плана перевозки некоторого однородного продукта от центров производства к центрам потребления транспортными средствами различного типа, реализация которого обеспечит минимальные затраты. Очевидно, что решение подобной задачи в классической постановке невозможно. Для учета дополнительных условий перевозки вводятся переменные с числом индексов более двух. В таких случаях говорят о многоиндексных транспортных задачах. Если в исходных данных имеем производительность каждого вида транспорта, то задача описывается трехиндексной моделью.

Теоретические и методологические вопросы, связанные с этой проблематикой, являлись предметом исследования в работах А. А. Бочкарева [1], Д. Б. Юдина и Е. Г. Гольштейна [2], А. М. Фриза [3]. Несмотря на достигнутые учеными результаты необходимо отметить, что достаточно эффективных методов решения общей многоиндексной транспортной задачи, отличных от общих методов линейного программирования, пока не существует.

Целью работы являлось изучение теоретических основ трехиндексной транспортной задачи, реализация решения задачи в математическом пакете, а также проверка возможности ее применения в планировании цепи поставок крупных торговых организаций.

Для описания математической задачи присвоим центрам производства, центрам потребления и способам транспортировок соответствующие индексы:

$\mathbf{i \in I = \{ 1, 2, \ldots, m \}, j \in J = \{ 1, 2, \ldots, n \}, k \in K = \{ 1, 2, \ldots, p \}}$.

Следующие величины являются известными и неотрицательными:

$\mathbf{a_i, i \in I}$ - количество продукции, находящейся в i-ом центре производства;

$\mathbf{b_j, j \in J}$ - количество продукции, необходимое j-му центру потребления;

$\mathbf{c_k, k \in K}$ - количество продукции, которое может перевести транспортными средствами k-го типа.

Пусть $\mathbf{x_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K}$, есть количество продукции, планируемое для перевозки из i-го центра производства в j-й центр потребления транспортным средством k-го типа. Тогда совокупность чисел $\mathbf{\{x_{ijk}\}, i \in I, j \in J, k \in K}$ называется планом транспортировки, который представляет собой трехиндексную матрицу.

При анализе литературы, посвященной данному типу транспортной задачи, было выяснено, что задача может быть представлена в виде задачи линейного программирования [4]: найти такое количество продукции, планируемое для перевозки из i-го центра производства в j-й центр потребления транспортным средством k-го типа, которое минимизирует функцию транспортных издержек и удовлетворяет условиям:

1. Из центров производства должен быть вывезен весь запас продукции.
2. Спрос всех потребителей должен быть удовлетворен.
3. Количество продукции, планируемое к перевозке средствами k-го типа, должно соответствовать возможностям средств данного типа.

Формально ограничения имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{x_{ijk} = a_i, i \in I;} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{x_{ijk} = b_j, j \in J;} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x_{ijk} = c_k, k \in K.} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\mathbf{x_{ijk} \geq 0} \text{ для всех } \mathbf{i \in I, j \in J, k \in K.} \qquad \textbf{(4)}$$

Стоимость перевозки $\mathbf{x_{ijk}}$ единиц продукта равна $\mathbf{c_{ijk} * x_{ijk}}$. Суммируя такие произведения по всем индексам, получаем общую величину транспортных издержек:

$$\mathbf{L(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{c_{ijk} * x_{ijk}} \qquad \textbf{(5)}$$

После введения всех необходимых понятий и определений можем сформулировать задачу составления плана перевозок как задачу линейного программирования: найти набор $\mathbf{X^* = \{x^*_{ijk}\}}$, минимизирующий функцию (5) и удовлетворяющий условиям (1-4).

Она называется трехиндексной с планарными суммами или трипланарной транспортной задачей (Т-3Р). Величины $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{b_j}$, $\mathbf{c_k}$, $\mathbf{c_{ijk}}$ являются параметрами задачи Т-3Р. Набор $\mathbf{\{x_{ijk}\}}$ – набор переменных задачи.

Графически модель задачи Т-3Р представима на рисунке 1:

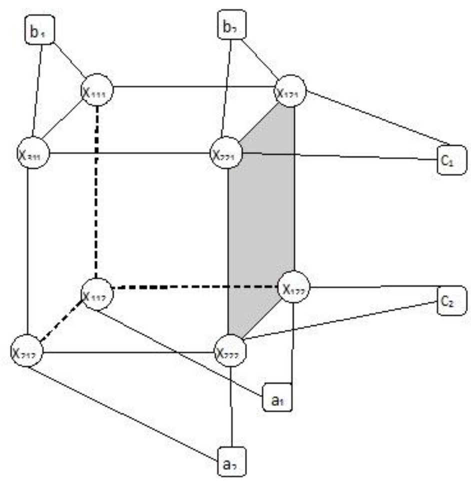

Рис. 1 Модель задачи Т-3Р
Где c1, c2 - количество продукции, которое можно перевести транспортными средствами 1 и 2 типа
a1, a2 - количество продукции, находящейся в 1-ом и 2-ом центрах производства.
b1, b2 - количество продукции, необходимое 1-му и 2-му центрам потребления

$\mathbf{x_{ijk}}$ - количество продукции, планируемое для перевозки.

Решение задачи Т-3Р начинается с построения опорного плана. Алгоритм его построения аналогичен двухиндексной транспортной задаче.

Каждый опорный план должен быть проверен на оптимальность. Если существует оптимальный план, следовательно, задача является разрешимой. По этой причине оптимальный план называют решением задачи. В работе для решения задачи Т-3Р рассмотрен метод потенциалов. Для его решения применим программную среду MathCad [5].

Для представления задачи в двухмерном пространстве составим матрицу тарифов из двух сечений по с, размещенных вертикально, друг под другом.

Для решения задачи в математическом пакете ограничения запишем в виде векторов-столбцов.

Матрица тарифов на перевозку однородного груза:

$$C := \begin{pmatrix} x_{111} & x_{121} & x_{131} \\ x_{211} & x_{221} & x_{231} \\ x_{112} & x_{122} & x_{132} \\ x_{212} & x_{222} & x_{232} \end{pmatrix}$$

Запас товара на складах: $A := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Потребности в товаре у центров сбыта: $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Ограничения видов транспорта: $D := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Целевая функция: $F(X) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot X_{i,j} + C_{m+i,j} \cdot X_{m+i,j} \right)$

Для реализации алгоритма решения была использована функция данного пакета Given - Minimize, которая минимизирует функцию общих издержек на транспортировку товара при заданных ограничениях.

Система ограничений сбалансированной задачи:

Given

$$\sum_{j=1}^{n} X_{1,j} + \sum_{j=1}^{n} X_{m+1,j} = A_1 \qquad \sum_{i=1}^{m} X_{i,1} + \sum_{i=m+1}^{2\cdot m} X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{2,j} + \sum_{j=1}^{n} X_{m+2,j} = A_2 \qquad \sum_{i=1}^{m} X_{i,2} + \sum_{i=m+1}^{2\cdot m} X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{i,3} + \sum_{i=m+1}^{2\cdot m} X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{i,j} = D_1$$

$$\sum_{i=m+1}^{2\cdot m} \sum_{j=1}^{n} X_{i,j} = D_2$$

Условие не отрицательности управляющей переменной: $X \geq 0$

Оптимальная распределительная матрица перевозок между складами и магазинами: $XX := \mathrm{Minimize}(F, X)$.

Реализация решения была неоднократно испытана на задачах, условия которых приближены к реальным. Последующая проверка полученного результата показала безошибочность ее написания. Реализация испытывалась на задачах с различными исходными данными, изменялись как тарифы на перевозку, так и количество потребителей, производителей и видов транспортных средств, что подтверждает возможность использования ее на практике крупными торговыми предприятиями.

Литература

1. *Бочкарев А. А.* Планирование и моделирование цепи поставок. – М.: Альфа-Пресс, 2008. – 192 с.
2. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Задачи и методы линейного программирования. – М., 1964. – 494 с.
3. *Frieze A. M.* Complexity of a 3-dimensional assignment problem // European J. Oper. Res. 1983. V. 13, № 2. P. 161-164.
4. *Раскин Л. Г., Кириченко И. О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. – М., 1982. –

242 с.
5. *Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В.* Mathcad 12, 2005, 224 с.